Популярные лекции
по математике

Г. Е. ШИЛОВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В ОБЛАСТИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

АН
КНИГИ
НИКИТИНА

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 4
§ 1. Графики 5
§ 2. Производные 21
§ 3. Интегралы 35
Ответы 45

ПРЕДИСЛОВИЕ

Основными понятиями математического анализа являются понятия производной и интеграла. Эти понятия не являются элементарными; в любом систематическом курсе математического анализа им предшествуют теория вещественных чисел, теория пределов, теория непрерывных функций. Такая предварительная подготовка необходима, чтобы сформулировать понятия производной и интеграла в достаточно универсальном виде, с применениями к возможно более широкому классу функций. Но если ограничиться лишь сравнительно узким классом рациональных функций и использовать наглядный язык графиков, можно рассказать о производной и интеграле на небольшом числе страниц, притом достаточно аккуратно и вместе с тем содержательно. В этом и состоит задача настоящей брошюры, рассчитанной на широкий круг читателей; уровень знаний школьника 9—10 класса вполне достаточен, чтобы понимать все, о чем здесь будет идти речь.

§ 1. ГРАФИКИ

Хотя мы предполагаем, что читатель умеет обращаться с графиками, мы все же напомним главные моменты.

Начертим на плоскости две взаимно перпендикулярные прямые, горизонтальную и вертикальную, и обозначим через O их точку пересечения. Горизонтальную прямую назовем *осью абсцисс*, вертикальную — *осью ординат*. Каждая из осей делится точкой O на две полуоси, положительную и отрицательную, при этом правая полуось оси абсцисс и верхняя полуось оси ординат считаются положительными, а левая полуось оси абсцисс и нижняя полуось оси ординат — отрицательными. Положительные полуоси отметим стрелками. Местоположение каждой точки M на плоскости теперь можно определить парой чисел. Для этого опустим из точки M перпендикуляры на каждую из осей; эти перпендикуляры отсекут на осях отрезки OA и OB (рис. 1). Длину отрезка OA, взятую со знаком «+», если A лежит на положительной полуоси, и со знаком «—», если A лежит на отрицательной полуоси, будем называть *абсциссой* точки M и обозначать через x. Аналогично длину отрезка OB (с тем же правилом знака) будем называть *ординатой* точки M и обозначать через y. Два числа x и y называются *координатами* точки M. Каждая точка на плоскости имеет координаты. Точки оси абсцисс имеют ординату, равную нулю, точки оси ординат имеют абсциссу, равную нулю. Начало координат O (точка пересечения осей) имеет обе координаты, равные

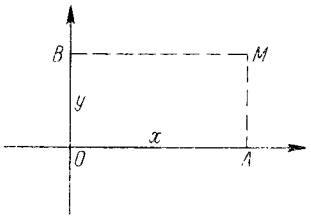

Рис. 1.

нулю. Обратно, если даны произвольные два числа x и y любых знаков, то всегда можно построить и, что весьма важно, ровно одну точку M, имеющую абсциссу x и ординату y; для этого нужно на оси абсцисс отложить отрезок $OA = x$ и из точки A восставить перпендикуляр $AM = y$ (с учетом знаков); точка M и будет искомой.

Пусть дано правило, в котором указано, какие действия следует произвести над независимым переменным (обозначенным через x), чтобы получить значение интересующей нас величины (обозначаемой через y).

Всякое такое правило, как говорят математики, *определяет величину y как функцию от независимого переменного x*. Можно сказать, что *данная функция* — это и есть то конкретное *правило*, по которому из значений x получаются значения y.

Например, формула

$$y = \frac{1}{1 + x^2}$$

показывает, что для получения значений величины y нужно независимое переменное x возвести в квадрат, прибавить единицу и затем единицу разделить на полученный результат. Если x принимает какое-либо числовое значение x_0, то по нашей формуле и y примет некоторое числовое значение y_0. Числа x_0 и y_0 определяют некоторую точку M_0 в плоскости чертежа. Вместо x_0 можно затем взять другое число x_1 и по формуле сосчитать новое значение y_1; пара чисел x_1, y_1 определит новую точку M_1 на плоскости. Геометрическое место всех точек плоскости, ординаты которых связаны с абсциссами данной формулой, называется *графиком* соответствующей функции.

Совокупность точек графика, вообще говоря, бесконечна, так что мы не можем рассчитывать фактически построить по указанному правилу их все без исключения. Но мы обойдемся без этого. В большинстве случаев достаточно некоторого небольшого числа точек, чтобы иметь возможность судить об общем виде графика.

Способ построения графика «по точкам» состоит именно в том, что намечают некоторое число точек графика и соединяют эти точки по возможности плавной линией.

В качестве примера рассмотрим график функции

$$y = \frac{1}{1 + x^2}. \qquad (1)$$

Составим следующую таблицу:

x	0	1	2	3	-1	-2	-3
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

В первой строке написаны значения $x = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$. Как правило, целые значения для x наиболее удобны для вычислений. Во второй строке написаны

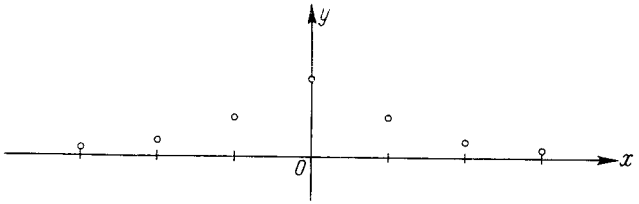

Рис. 2.

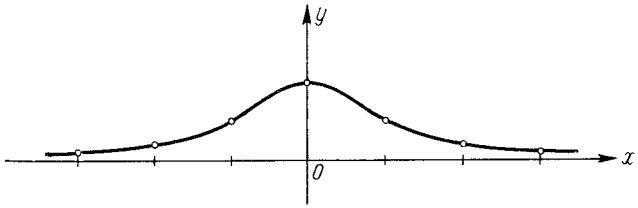

Рис. 3.

соответствующие значения y, найденные из формулы (1). Отметим соответствующие точки на плоскости (рис. 2). Соединяя их плавной линией, получаем график (рис. 3).

Правило построения «по точкам», как мы видим, чрезвычайно просто и не требует никакой «науки». Но тем не менее, может быть, именно поэтому, слепое следование правилу «по точкам» может привести к большим ошибкам.

Построим «по точкам» кривую, заданную уравнением

$$y = \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} . \qquad (2)$$

Таблица значений x и y, соответствующая этому уравнению, следующая:

x	0	1	2	3	-1	-2	-3
y	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{121}$	$\frac{1}{676}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{121}$	$\frac{1}{676}$

Соответствующие точки на плоскости показаны на рис. 4. Этот чертеж весьма похож на только что приведенный. Соединяя отмеченные точки плавной кривой, мы

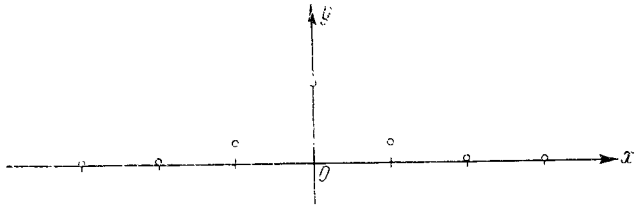

Рис. 4.

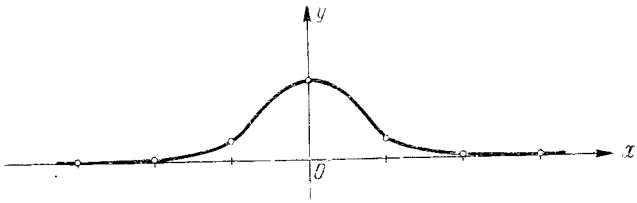

Рис. 5.

получаем график (рис. 5). Кажется, на этом можно было бы положить карандаш и успокоиться: искусство строить графики нами постигнуто! Но все-таки для контроля вычислим y для какого-нибудь промежуточного значения x, например для $x = 0{,}5$. Вычисляем и получаем неожиданный результат: $y = 16$. Это резко не соответствует нашему чертежу. И мы не гарантированы, что при вычислении y для других промежуточных значений x — а их ведь бесконечное множество — не получится еще больших

песообразностей. К сожалению, способ построения графиков «по точкам» оказывается недостаточно надежным.

Далее мы рассмотрим другой способ построения графиков, более надежный в смысле предохранения от неожиданностей, подобных той, с которой мы только что встретились. В дальнейшем, применяя этот способ, мы получим

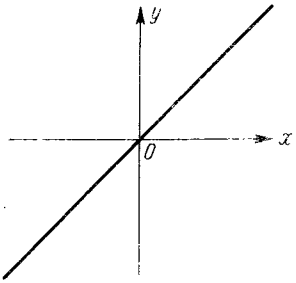

Рис. 6.

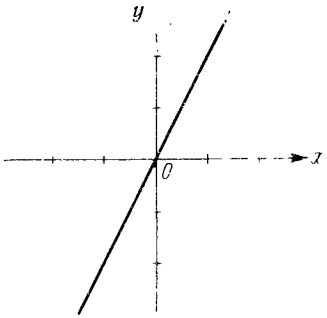

Рис. 7.

возможность построить правильный график для уравнения (2). По этому способу — назовем его, например, «по действиям» — нужно произвести непосредственно на графиках все те действия, которые записаны в данной нам формуле — сложение, вычитание, умножение, деление и т. д.

Рассмотрим несколько простейших примеров. Построим график, отвечающий уравнению

$$y = x. \tag{3}$$

Это уравнение говорит, что все точки искомой линии графика имеют равные абсциссы и ординаты. Геометрическое место точек, имеющих ординату, одинаковую с абсциссой, есть биссектриса угла между положительными полуосями и угла между отрицательными полуосями (рис. 6).

График, отвечающий уравнению $y = kx$ с некоторым коэффициентом k, получается из предыдущего умножением каждой ординаты на одно и то же число k. Пусть, например, $k = 2$; каждую ординату предыдущего графика нужно удвоить, и в результате мы получим прямую, более круто поднимающуюся кверху (рис. 7). С каждым шагом вправо по оси x новая прямая поднимается

на два шага вверх по оси y. Между прочим, это позволяет легко выполнить построение на клетчатой или миллиметровой бумаге. В общем случае уравнения $y = kx$ с любым k также получается прямая. Если $k > 0$, то с каждым

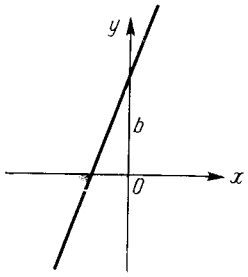

Рис. 8.

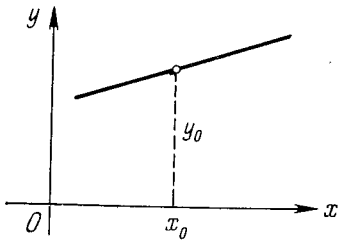

Рис. 9.

шагом вправо она будет подниматься на k шагов вверх по оси y. Если $k < 0$, то прямая будет не подниматься, а опускаться.

Рассмотрим теперь формулу

$$y = kx + b. \tag{4}$$

Чтобы построить соответствующий график, нужно к каждой ординате уже известной линии $y = kx$ прибавить одно и то же число b. При этом вся прямая $y = kx$ сдвинется, как целое, по плоскости вверх на b единиц (при $b > 0$; при $b < 0$ исходная прямая, естественно, не поднимется, а опустится). В результате получится прямая, параллельная исходной, но уже не проходящая через начало координат и отсекающая на оси ординат отрезок b (рис. 8).

Число k называется *угловым коэффициентом* прямой $y = kx + b$; как мы уже говорили, число k показывает, на сколько шагов поднимается прямая вверх при каждом шаге, сделанном вправо. Иными словами, число k есть тангенс угла между направлением оси x и прямой $y = kx + b$.

Уравнению

$$y = k(x - x_0) + y_0 \tag{4'}$$

отвечает прямая с угловым коэффициентом k, проходящая через точку (x_0, y_0) (рис. 9), так как при подстановке $x = x_0$ получаем $y = y_0$.

Итак, график любого многочлена 1-й степени от x есть некоторая прямая, которая строится по указанным правилам. Переходим к графикам многочленов 2-й степени.

Рассмотрим формулу

$$y = x^2. \qquad (5)$$

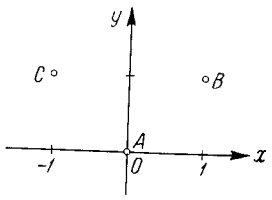

Рис. 10.

Ее можно представить в виде

$$y = y_1^2, \text{ где } y_1 = x.$$

Иными словами, искомый график получится, если каждую ординату уже известной нам линии $y = x$ возвести в квадрат. Выясним, что при этом должно получиться.

Поскольку $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $(-1)^2 = 1$, мы получаем три опорные точки A, B, C (рис. 10). Если $x > 1$, то $x^2 > x$; поэтому справа от точки B график пойдет выше

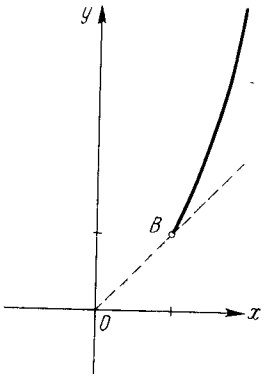

Рис. 11.

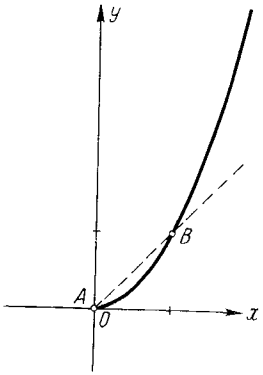

Рис. 12.

биссектрисы координатного угла (рис. 11). Если $0 < x < 1$, то $0 < x^2 < x$; поэтому между точками A и B график идет ниже биссектрисы. Более того, мы утверждаем, что при подходе к точке A график входит в любой угол, ограниченный сверху прямой $y = kx$ (с как угодно малым k), а снизу — осью x; действительно, неравенство $x^2 < kx$ выполняется, если только $x < k$. Этот факт означает, что искомая кривая *касается* в точке O оси абсцисс (рис. 12).

Пойдем теперь по оси x влево от точки O. Мы знаем, что числа $-a$ и $+a$ при возведении в квадрат дают один и тот же результат a^2. Таким образом, ордината нашей кривой при $x = -a$ будет та же, что и при $x = +a$. Геометрически это означает, что график нашей кривой в левой

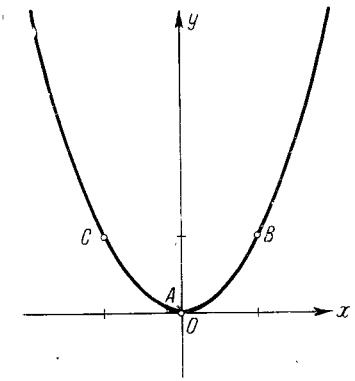

Рис. 13.

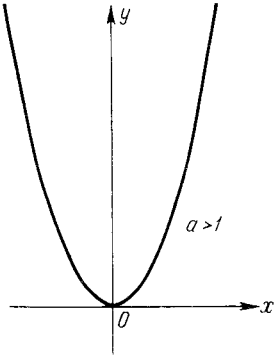

Рис. 14.

полуплоскости будет получаться отражением имеющегося уже графика в правой полуплоскости относительно оси ординат. Мы получаем кривую, которая называется *параболой* (рис. 13).

Теперь, действуя так же, как и выше, можно построить более сложную кривую

$$y = ax^2 \tag{6}$$

и еще более сложную

$$y = ax^2 + b. \tag{7}$$

Первая из них получается умножением всех ординат параболы (5) — мы будем называть ее *стандартной параболой* — на число a.

При $a > 1$ получится похожая кривая, но более круто поднимающаяся кверху (рис. 14).

При $0 < a < 1$ кривая будет более пологой (рис. 15), а при $a < 0$ ее ветви опрокинутся вниз (рис. 16). Кривая (7) получится из кривой (6) сдвигом ее кверху на отрезок b, если $b > 0$ (рис. 17). Если же $b < 0$, то сдвигать кривую придется не вверх, а вниз (рис. 18). Все эти кривые также называются параболами.

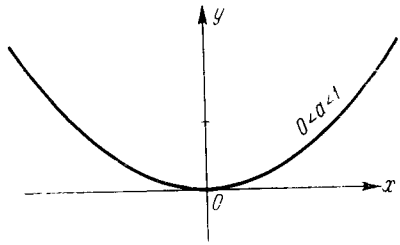

Рис. 15.

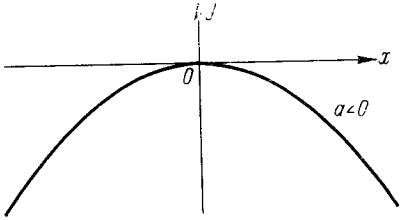

Рис. 16.

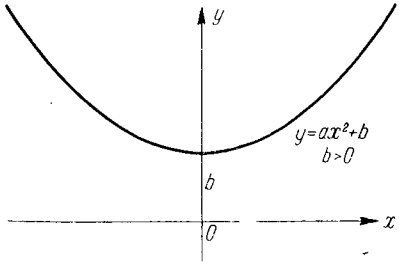

Рис. 17.

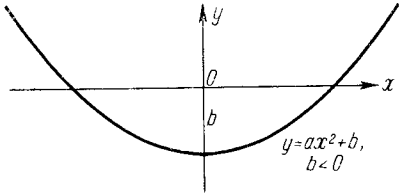

Рис. 18.

Приведем несколько более сложный пример на построение графиков методом умножения. Пусть задано построить график по уравнению

$$y = x(x-1)(x-2)(x-3). \qquad (8)$$

Здесь дано произведение четырех множителей. Нарисуем график каждого из них в отдельности: все они — прямые,

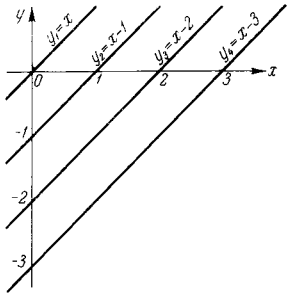

Рис. 19.

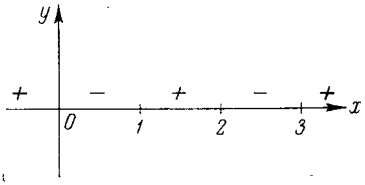

Рис. 20.

параллельные биссектрисе координатного угла и отсекающие на оси ординат отрезки соответственно (рис. 19):

$$0, \ -1, \ -2, \ -3.$$

В точках 0, 1, 2, 3 на оси x искомая кривая будет иметь ординату 0, так как произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю. В других местах произведение будет отличным от нуля и будет иметь знак, который легко найти по знакам множителей. Так, справа от точки 3, все множители положительны, следовательно, и произведение положительно. Между точками 2 и 3 один множитель отрицателен, поэтому произведение отрицательно. Между точками 1 и 2 — два отрицательных множителя, поэтому произведение положительно, и т. д. Мы получаем следующее расположение знаков произведения (рис. 20). Справа от точки 3 все множители при увеличении x возрастают, следовательно, и произведение будет возрастать, и притом очень быстро. Слева от точки 0 все множители возрастают в отрицательную сторону, поэтому произведение (оно положительно) также быстро возрастает.

Теперь легко набросать и общий вид графика (рис. 21).

До сих пор мы использовали действия сложения и умножения. Теперь добавим к ним деление. Построим кривую

$$y = \frac{1}{1 + x^2}. \tag{9}$$

Для этого построим в отдельности графики числителя и знаменателя.

График числителя

$$y_1 = 1$$

есть прямая, параллельная оси абсцисс, на высоте 1. График знаменателя

$$y_2 = x^2 + 1$$

есть стандартная парабола, сдвинутая на 1 вверх. Оба эти графика показаны на рис. 22.

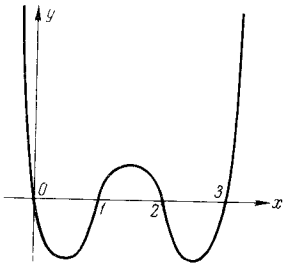

Рис. 21.

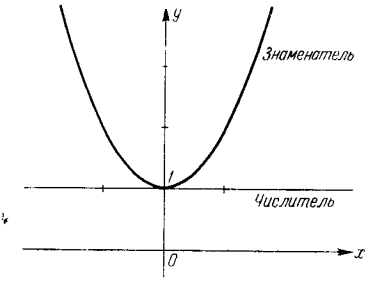

Рис. 22.

Будем теперь производить деление каждой ординаты числителя на соответствующую (т. е. взятую при том же x) ординату знаменателя. Когда $x = 0$, мы видим, что $y_1 = y_2 = 1$, откуда и $y = 1$. При $x \neq 0$ числитель меньше знаменателя и частное меньше 1. Так как числитель и знаменатель всюду положительны, то и частное положительно, следовательно, график проходит в полосе, ограниченной осью абсцисс и прямой $y = 1$. Когда x неограниченно увеличивается, тогда знаменатель неограниченно увеличивается, а числитель остается

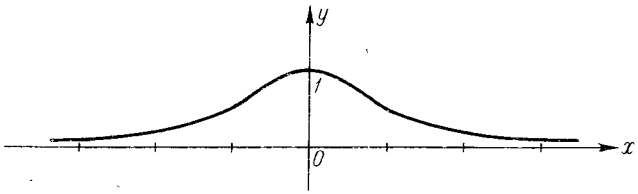

Рис. 23.

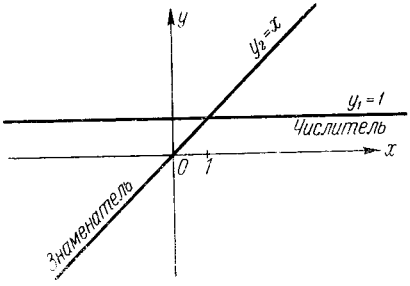

Рис. 24.

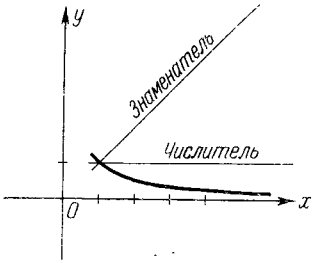

Рис. 25.

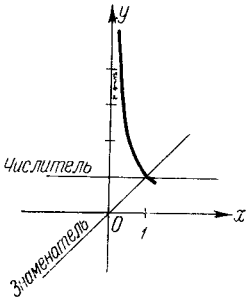

Рис. 26.

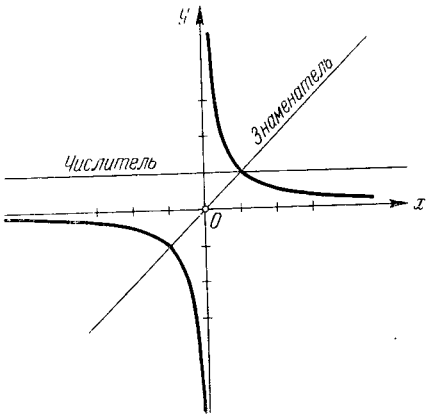

Рис. 27.

постоянным; поэтому частное стремится к нулю. Все это приводит к следующему графику частного (рис. 23). Чертеж получается такой же, какой мы построили по точкам (рис. 3).

При графическом делении особую роль играют те значения x, при которых знаменатель обращается в нуль. Если числитель при этом не обращается в нуль, то частное уходит в бесконечность. Чтобы понять, что означают эти слова, изобразим кривую

$$y = \frac{1}{x}. \qquad (10)$$

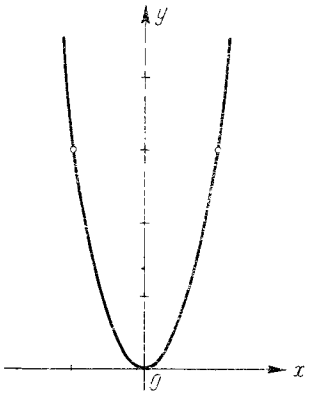

Рис. 28.

Здесь графики числителя и знаменателя нам уже известны (рис. 24). При $x = 1$ мы имеем $y_1 = y_2 = 1$, откуда и $y = 1$. При $x > 1$ числитель меньше знаменателя, частное меньше 1, как и в предыдущем примере, когда x неограниченно увеличивается, частное приближается к нулю, мы получаем участок графика, соответствующий значениям $x > 1$ (рис. 25).

Рассмотрим теперь область значений x между 0 и 1. Когда x от 1 приближается к нулю, знаменатель стремится к нулю, в то время как числитель остается равным 1. Поэтому частное неограниченно увеличивается, превосходя при достаточно малых x любое сколь угодно большое число, и мы получаем ветвь, уходящую в бесконечность (рис. 26). При $x < 0$ знаменатель, а с ним и вся дробь становятся отрицательными. Общий ход графика представлен на рис. 27.

Теперь мы уже можем приняться по-настоящему за построение графика кривой, о которой шла речь вначале:

$$y = \frac{1}{(3x - 1)^2}. \qquad (11)$$

Будем сначала строить график знаменателя. Кривая $y_1 = 3x^2$ есть «утроенная» стандартная парабола (рис. 28). Вычитание единицы означает спуск графика на одну

единицу вниз (рис. 29). Кривая пересекает ось x в двух точках, которые мы легко найдем, приравнивая $3x^2 - 1$ нулю: $x_{1,2} = \pm \sqrt{1/3} = \pm 0{,}577\ldots$ Возведем полученный график в квадрат. В точках x_1 и x_2 ординаты останутся равными нулю. Все остальные ординаты будут положительными, так что график будет проходить выше оси абсцисс. В точке $x = 0$ ордината будет равна $(-1)^2 = 1$

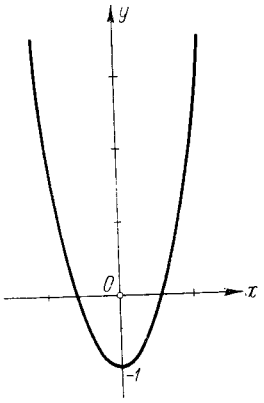

Рис. 29.

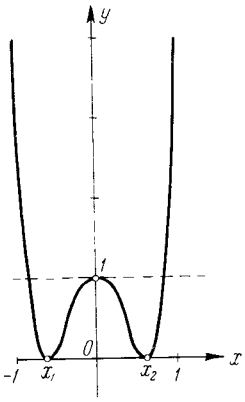

Рис. 30.

и это будет наибольшая ордината на участке от x_1 до x_2. Вне этого участка кривая будет в обе стороны круто подниматься кверху (рис. 30).

Теперь график знаменателя построен. На этом же чертеже мы показали пунктиром и график числителя $y_1 = 1$. Остается теперь разделить числитель на знаменатель. Так как числитель и знаменатель всюду одного знака, то частное будет положительным и весь график пройдет выше оси абсцисс. При $x = 0$ числитель и знаменатель равны, их отношение равно 1. Пойдем по оси абсцисс вправо от точки 0. Числитель остается равным 1, а знаменатель уменьшается, следовательно, частное увеличивается от значения 1. Когда мы дойдем до значения $x_2 = 0{,}577\ldots$, знаменатель станет равным нулю. Это означает, что частное к этому моменту уйдет в бесконечность (рис. 31). За точкой x_2 знаменатель быстро пройдет в обратную сторону путь от значения 0 до значения 1 и далее начнет неограниченно возрастать. Частное наобо-

рот, из бесконечности вернется к 1, пересечет прямую $y = 1$ в той же точке, где и y_3, и далее будет неограниченно приближаться к нулю (рис. 32).

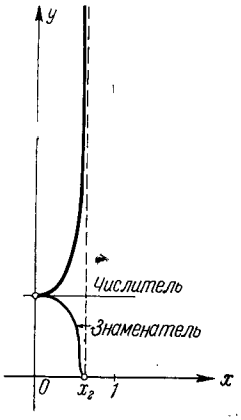

Рис. 31.

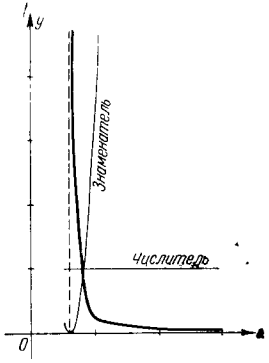

Рис. 32.

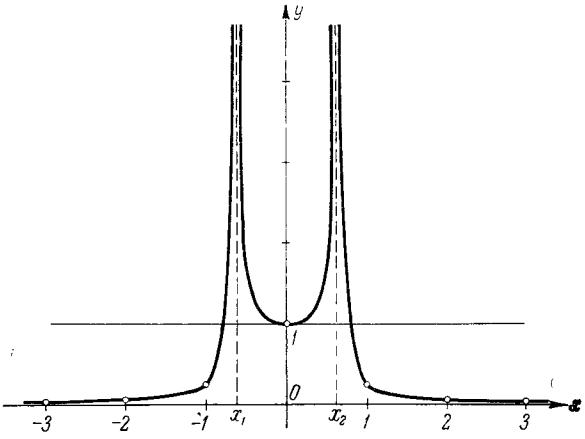

Рис. 33.

Точно такая же картина получается с левой стороны от оси ординат (рис. 33).

Мы отметили на этом графике точки, соответствующие целым значениям $x = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$. Это те самые точки, которые мы намечали при построении графика «по точкам» на стр. 8. Но действительный ход графика сильно отличается от того, который был предложен на рис. 5.

Мы видим, что в действительности вместо того, чтобы плавно спускаться от значения 1 (при $x = 0$) к значению $1/4$ (при $x = 1$) и далее, кривая уходит вверх в бесконечность. Мы можем увидеть здесь же и точку с координатами $x = 1/2$, $y = 16$, которая никак не умещалась на прежнем неправильном графике, но очень хорошо умещается на новом, правильном.

Мы рассказали о простейших операциях, которые можно производить с графиками. Точнее говоря, мы отправлялись от простейшего уравнения $y = x$ и применяли далее четыре арифметические операции: сложение, вычитание, умножение и деление.

Функции $y(x)$, получающиеся в результате таких операций, представляются в форме частного двух многочленов

$$y(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m}$$

и называются *рациональными* функциями переменного x. (В анализе существуют и другие функции, но для самого их определения требуется развитая теория вещественных чисел; поэтому в настоящей брошюре мы ограничиваемся только рациональными функциями.)

Читателю, заинтересовавшемуся построением графиков «по действиям», мы предлагаем несколько задач для самопроверки и тренировки.

ЗАДАЧИ

Начертите графики по следующим уравнениям:

1. $y = x^2 + x + 1$. 2. $y = x(x^2 - 1)$. 3. $y = x^2(x - 1)$.

4. $y = x(x - 1)^2$. 5. $y = \frac{x}{x-1}$.

Указание. В задаче 5 полезно выделить целую часть:

$$\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}.$$

6. $y = \dfrac{x}{x-1}$. 7. $y = \dfrac{x^3}{x-1}$.

Указание. В задачах 6 и 7 также полезно выделить целую часть.

8. $y = \pm\sqrt{x}$.

Указание. Квадратный корень из x существует при $x \geqslant 0$ *), не существует при $x < 0$.

9. $y = \pm\sqrt{1-x^2}$.

Как доказать, что получающаяся кривая — окружность?

Указание. Припомнить точное определение окружности и использовать теорему Пифагора.

10. $y = \pm\sqrt{1+x^2}$.

Докажите, что ветви этой кривой при $x \to \infty$ неограниченно приближаются к биссектрисам координатных углов.

Указание. $\sqrt{1+x^2} - x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$.

11. $y = \pm x\sqrt{x(1-x)}$. 12. $y = \pm x^2\sqrt{1-x}$.

13. $y = \dfrac{1-x^2}{2 \pm \sqrt{1-x^2}}$. 14. $y = x^{2/3}(1-x)^{2/3}$.

Ответы ко всем задачам даны на стр. 45—48.

§ 2. ПРОИЗВОДНЫЕ

Прием построения графика «по действиям» позволяет дать общее представление о ходе изменения функции. Но для ответа на некоторые более точно поставленные вопросы такие приемы уже недостаточны. Например, на некотором графике (рис. 34) мы видим, что кривая, опускавшаяся до некоторого значения y_0, которое отвечает

*) Утверждение вовсе не самоочевидное, а требующее для полного обоснования развитой теории вещественных чисел. Доказательство можно найти в любом хорошем учебнике анализа. Здесь лишь требуется, поверив в существование корня, изобразить его график.

абсциссе x_0, затем начинает подниматься; соответствующая функция $y(x)$, как говорят, *имеет в точке x_0 локальный минимум*. Аналогичный смысл имеет понятие *локального максимума*; мы говорим, что функция $y = y(x)$ имеет в точке x_0 локальный максимум, если ее график с увеличением x до точки x_0 поднимается, а после точки x_0 — опускается (рис. 35). Спрашивается: каковы точные значения x_0 и y_0?

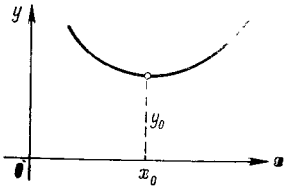

Рис. 34.

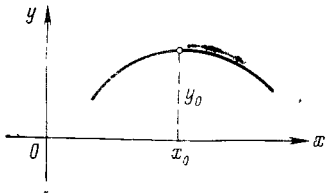

Рис. 35.

Легко представить себе конкретную ситуацию, в которой возникает подобная проблема. Пусть, например, в некотором производстве график 34 означает стоимость тонны готовой продукции в зависимости от суточного расхода электроэнергии. При малом суточном расходе энергии производство тонны продукции будет весьма длительным и наличие постоянных расходов (оплата персонала и т. п.) приведет к большой ее стоимости. При большом суточном расходе энергии время производства тонны продукции сократится, но стоимость ее увеличится за счет стоимости использованной энергии. При каком-то значении суточного расхода энергии стоимость тонны продукции будет минимальной; естественно, что нас весьма интересует, какова будет эта минимальная стоимость и какому именно суточному расходу энергии она соответствует. В дальнейшем мы рассмотрим одну похожую задачу (стр. 30).

Для точного ответа на поставленный выше вопрос о положении точки локального минимума требуются уже новые приемы, вводящие нас в раздел математического анализа, называемый *дифференциальным исчислением*.

Идея решения приведенной задачи такова. В каждой точке графика $y(x)$ можно провести *касательную прямую*. Касательная прямая в точке A графика $y(x)$ (рис. 36)

определяется как прямая α, проходящая через точку A так, что сама кривая $y(x)$ при приближении к точке A заходит в любой сколь угодно малый угол с вершиной A, содержащий внутри прямую α, и там остается. (Именно в этом смысле ось абсцисс касалась стандартной параболы в § 1.) Произвольная прямая β, проходящая через точку A, называется *секущей* для графика $y(x)$; для секущей, не совпадающей с касательной, всегда можно указать

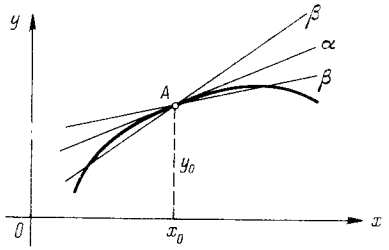

Рис. 36.

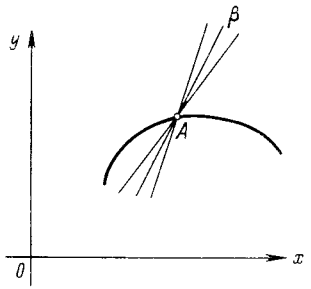

Рис. 37.

угол с вершиной в точке A и с биссектрисой β, во внутренность которого кривая вблизи точки A не входит (рис.37). Угловой коэффициент касательной в точке (x, y) обозначим $k = k(x)$. Эта функция $k(x)$ называется *производной от функции* $y(x)$. (Немного погодя мы покажем, что если $y(x)$ есть многочлен, то и $k(x)$ есть многочлен, если $y(x)$ есть рациональная функция, то и $k(x)$ есть рациональная функция, и вообще дадим точные правила для вычисления $k(x)$.) Пусть функция $k(x)$ для данной $y(x)$ найдена. В искомой точке локального минимума (x_0, y_0) касательная α должна быть горизонтальна (доказательство от противного: мы видели, что кривая $y = y(x)$ обязана заходить во всякий как угодно малый угол, содержащий внутри себя прямую α; если прямая α наклонна, можно построить такой малый угол с биссектрисой α, у которого обе стороны имеют одинаковый по знаку наклон (рис. 36), и, следовательно, кривая $y = y(x)$ не может иметь локального минимума). Поэтому в точке $x = x_0$ локального минимума мы должны иметь $k(x_0) = 0$. Пишем уравнение

$$k(x) = 0.$$

У этого уравнения, вообще говоря, может быть несколько решений. Каждое из них определяет точку (x_0, y_0) на кривой $y = y(x)$, где касательная горизонтальна; мы должны найти все эти решения и среди них выделить именно то,

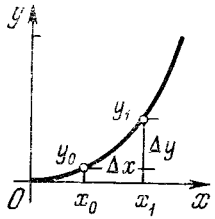

Рис. 38.

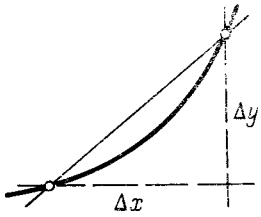

Рис. 39.

которое нас интересует. Таким образом, если функция $k(x)$ известна, вопрос сводится к решению алгебраического уравнения.

Теперь переходим к построению функции $k(x)$. Пусть сначала $y = x^2$ есть наша стандартная парабола. Мы желаем найти угловой коэффициент касательной в точке (x_0, y_0) на этой параболе.

Обозначим через Δx и Δy приращение абсциссы и ординаты нашей параболы при переходе из точки (x_0, y_0) в близкую точку (x_1, y_1):

$$x_1 = x_0 + \Delta x, \quad y_1 = y_0 + \Delta y$$

(рис. 38). Так как

$$y_0 = x_0^2, \; y_0 + \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2,$$

то, вычитая, находим

$$\Delta y = 2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Через две точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) проведем секущую прямую (рис. 39). Ее угловой коэффициент равен, очевидно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x,$$

а полное ее уравнение имеет вид (см. (4′))

$$y = (2x_0 + \Delta x)(x - x_0) + y_0. \qquad (12)$$

Будем уменьшать Δx до нуля (рис. 40). Секущая (12) соответственно поворачивается вокруг точки (x_0, y_0) и, когда Δx становится равным нулю, занимает положение, описываемое уравнением

$$y_{\text{кас}} = 2x_0(x - x_0) + y_0. \qquad (*)$$

Эта прямая, результат поворота секущей, и *будет искомой касательной к параболе* $y = x^2$ *в точке* (x_0, y_0).

Докажем это утверждение. Уравнению кривой $y = x^2$ можно придать вид

$$y = y_0 + 2x_0(x - x_0) + (x - x_0)^2 = \\ = y_0 + [2x_0 + (x - x_0)](x - x_0);$$

отсюда видно, что при малых отклонениях x от x_0 график кривой проходит в пределах как угодно узкого угла, образованного прямыми

$$y = y_0 + (2x_0 \pm \varepsilon)(x - x_0)$$

именно это будет иметь место, если считать, что $-\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon$. Так как прямая (*) лежит внутри этого угла при любом ε, то, в соответствии с приведенным выше определением, она и будет искомой касательной.

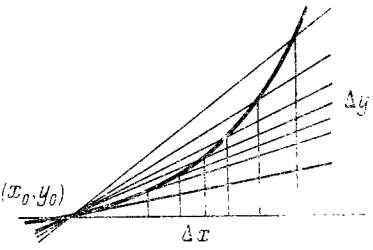

Рис. 40.

Угловой коэффициент нашей касательной оказался равным $2x_0$; таким образом, производная от функции $y = x^2$ равна

$$k(x) = 2x.$$

Посмотрим, что дает подобное построение для функции $y = P(x)$, где $P(x)$ — многочлен n-й степени:

$$P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n. \qquad (13)$$

Мы снова соединяем секущей точку (x_0, y_0), в которой требуется провести касательную, и близкую к ней точку $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ на нашей кривой. При этом

$$y_0 + \Delta y = P(x_0 + \Delta x) = \\ = x_0 + a_1(x_0 + \Delta x) + \ldots + a_n(x_0 + \Delta x)^n. \qquad (14)$$

Будем обозначать через ε_1 всякую сумму членов, содержащих Δx в первой степени и выше, через ε_2 — всякую сумму членов, содержащих Δx во второй степени и выше.

Так как

$$y_0 = a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n,$$

то, раскрывая скобки (14) по формуле Ньютона*) и вычитая (13) из (14), находим

$$\Delta y = (a_1 + 2a_2 x_0 + \ldots + n a_n x_0^{n-1})\,\Delta x + \varepsilon_2. \qquad (15)$$

Далее, угловой коэффициент секущей получается делением Δy на Δx. Поскольку $\varepsilon_2 : \Delta x = \varepsilon_1$, его выражение имеет вид

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a_1 + 2a_2 x_0 + \ldots + n a_n x_0^{n-1} + \varepsilon_1.$$

Полное уравнение секущей таково:

$$y = (a_1 + 2a_2 x_0 + \ldots + n a_n x_0^{n-1} + \varepsilon_1)(x - x_0) + y_0.$$

Когда мы полагаем Δx равным 0, величина ε_1 обращается в нуль, и мы получаем уравнение касательной

$$y_{\text{кас}} = (a_1 + 2a_2 x_0 + \ldots + n a_n x_0^{n-1})(x - x_0) + y_0.$$

Для углового коэффициента касательной получается выражение

$$k = a_1 + 2a_2 x_0 + \ldots + n a_n x_0^{n-1}. \qquad (16)$$

Величина k, когда x_0 фиксировано, есть число; если x_0 изменять, это число будет изменяться, и мы получим функцию, дающую значения соответствующих угловых коэффициентов касательных к кривой $y = P(x)$ в различных ее точках. Эта функция и есть, как мы говорили, производная функция от $P(x)$; иначе она обозначается $P'(x)$.

---

*) Формула Ньютона: для любого k и любых u, v

$$(u+v)^k = u^k + \frac{k}{1}u^{k-1}v + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}u^{k-2}v^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}u^{k-3}v^3 + \ldots + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}u^2 v^{k-2} + \frac{k}{1}uv^{k-1} + v^k.$$

Полученная формула может быть написана так:

$$P'(x) = a_1 + 2a_2x \ldots + na_nx^{n-1}. \qquad (16')$$

Закон образования $P'(x)$ из $P(x)$ очень простой: в сумме (13) каждая величина x^k заменяется на kx^{k-1}.

В частности, производная от постоянной (т. е. от функции, принимающей при всех x одно и то же значение $y = a_0$) равна 0. Впрочем, в данном случае это очевидно и геометрически: касательная к графику функции $y = a_0$ в каждой точке горизонтальна!

Возвращаясь к общему случаю, отметим равенство, вытекающее из (15):

$$P(x + \Delta x) = P(x) + P'(x)\Delta x + \varepsilon_2. \qquad (17)$$

Рассмотрим аналогичный вопрос о касательной для общей рациональной функции

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)}, \qquad (18)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены.

Здесь мы имеем, используя (17),

$$y_0 + \Delta y = \frac{P(x_0 + \Delta x)}{Q(x_0 + \Delta x)} = \frac{P(x_0) + P'(x_0)\Delta x + \varepsilon_2}{Q(x_0) + Q'(x_0)\Delta x + \varepsilon_2}. \qquad (19)$$

Вычитая (18) из (19), находим

$$\Delta y = \frac{(Px_0) + P'(x_0)\Delta x + \varepsilon_2}{Q(x_0) + Q'(x_0)\Delta x + \varepsilon_2} - \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} =$$
$$= \frac{[P'(x_0)\ Q(x_0) - Q'(x_0)\ P(x_0)]\Delta x + \varepsilon_2}{Q(x_0)\,[\,Q(x_0) + Q'(x_0)\Delta x + \varepsilon_2\,]} \qquad (20)$$

Отсюда угловой коэффициент секущей равен

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{P'(x_0)\,Q(x_0) - Q'(x_0)\,P(x_0) + \varepsilon_1}{Q^2(x_0)\ \varepsilon_1} \qquad (21)$$

Полное уравнение секущей имеет вид

$$y = \frac{P'(x_0)\,Q(x_0) - Q'(x_0)\,P(x_0) + \varepsilon_1}{Q_2(x_0)\ \varepsilon_1}(x - x_0) + y_0.$$

Будем считать, что $Q(x_0) \neq 0$. Полагая здесь $\Delta x = 0$, получаем уравнение касательной

$$y_{\text{кас}} = \frac{P'(x_0)\,Q(x_0) - Q'(x_0)\,P(x_0)}{Q^2(x_0)}(x - x_0) + y_0.$$

Угловой коэффициент касательной при $x = x_0$ оказывается равным

$$y'(x_0) = \frac{P'(x_0)\,Q(x_0) - Q'(x_0)\,P(x_0)}{Q^2(x_0)}.$$

Полученная формула дает правило вычисления производной от частного $\frac{P(x)}{Q(x)}$:

$$\left(\frac{P}{Q}\right)' = \frac{P'Q - Q'P}{Q^2}. \qquad (22)$$

Рассмотрим несколько примеров на применение всех приведенных правил.

1. Какие два положительных числа, сумма которых равна c, имеют наибольшее произведение?

Эта задача имеет элементарное алгебраическое решение. Не обращаясь к нему, применим наш общий метод. Если одно из этих чисел есть x, а другое $c - x$, то речь идет о разыскании максимума функции

$$P(x) = x(c - x) = -x^2 + cx.$$

Мы имеем

$$P'(x) = -2x + c$$

и, приравнивая производную нулю, находим решение:

$$x = c/2, \quad c - x = c/2.$$

Следующая задача, по форме похожая на предыдущую, элементарно уже не решается.

2. Какие два положительных числа, сумма которых равна c, обладают тем свойством, что произведение куба первого на квадрат второго дает наибольшую возможную величину?

Здесь речь идет о максимуме функции

$$P(x) = x^3 (c - x)^2 = x^5 - 2cx^4 + c^2x^3.$$

Как мы знаем, в точке максимума производная функции должна обратиться в нуль.

Вычислим производную

$$P'(x) = 5x^4 - 8cx^3 + 3c^2x^2.$$

Приравнивая ее нулю, замечаем очевидное решение $x = 0$.

Разыскивая решения $x \neq 0$, мы должны решить квадратное уравнение

$$5x^2 - 8cx + 3c^2 = 0.$$

Его решение

$$x_{1,2} = \frac{4c \pm \sqrt{16c^2 - 15c^2}}{5} = \frac{4c \pm c}{5}.$$

Таким образом, касательная к графику функции $y = P(x)$ горизонтальна в точках $x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{5}c$ и $x_3 = c$. Значения x_1 и x_3 дают для $P(x)$ нулевую величину, значение x_2 — положительную, $P(x_2) = (3/5)^3 (2/5)^2 c^5$. Значит, искомые числа суть $x_2 = 3c/5$, $c - x_2 = 2c/5$.

3. Под каким углом пересекает ось x кривая $y = P(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$ (см. рис. 21 на стр. 15)? Естественно, что под углом между осью и кривой мы будем понимать угол между осью и касательной к кривой (в точке пересечения с осью).

Р е ш е н и е. Раскрывая скобки, получаем

$$y = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x;$$

отсюда по формуле (16′)

$$y' = 4x^3 - 18x^2 + 22x - 6.$$

Кривая $y = P(x)$ пересекает ось x в точках 0, 1, 2 и 3. Последовательно подставляя, получаем

$$y'(0) = -6,\ y'(1) = 2,\ y'(2) = -2,\ y'(3) = 6.$$

Эти числа есть угловые коэффициенты касательных в указанных точках, т. е. тангенсы искомых углов.

4. В каких точках касательная к этой же кривой горизонтальна?

Угловой коэффициент касательной в точках, где она горизонтальна, равен 0. Приравнивая 0 выражение производной, получаем уравнение

$$4x^3 - 18x^2 + 22x - 6 = 0.$$

У этого уравнения есть очевидное (из чертежа, на основании соображений симметрии) решение $x_1 = 3/2$. Выделяя

множитель $x - 3/2$, получаем

$$4x^3 - 18x^2 + 22x - 6 = 4(x - 3/2)(x^2 - 3x + 1).$$

Остается решить квадратное уравнение $x^2 - 3x + 1 = 0$. Решая, находим

$$x_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = 1{,}5 \pm 1{,}118...$$

Легко вычисляются и соответствующие ординаты:

$$y_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{16},$$

$$y_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} =$$

$$= \frac{1}{16}(5 - 9)(5 - 1) = -1.$$

5. Известно, что скорость теплохода v в зависимости от стоимости часового расхода топлива p руб. выражается формулой

$$v = c\frac{p}{p+1}. \qquad (23)$$

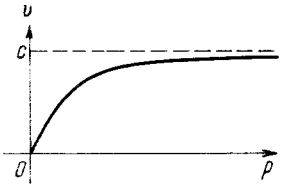

Рис. 41.

Эта формула иллюстрируется графиком (рис. 41). График отвечает естественному предположению, что вначале при сравнительно небольших затратах на топливо скорость теплохода возрастает пропорционально росту затрат; в дальнейшем прирост скорости замедляется, и никаким увеличением подачи топлива нельзя заставить теплоход двигаться быстрее некоторой предельной скорости c.

Кроме расходов на топливо имеются постоянные расходы, которые составляют q руб. в час. С какой скоростью следует плыть из порта A в порт B, находящийся от A на расстоянии s *км*, чтобы общая стоимость плавания была минимальной?

Р е ш е н и е. Пусть v — некоторая скорость, $T = s/v$ — время путешествия. Расходы на топливо вычисляются следующим образом: часовой расход получается обращением формулы (23):

$$p = \frac{v}{c - v}, \qquad (24)$$

а полный расход P — умножения (24) на время $T = s\,v$: $P = \frac{s}{c-v}$. Постоянный расход Q дает величину $qT = q\frac{s}{v}$. Общий расход R равен

$$R = P + Q = \frac{s}{c-v} + q\,\frac{s}{v} = s\left(\frac{1}{c-v} + \frac{q}{v}\right). \quad (25)$$

График этой функции имеет вид, показанный на рис. 42.

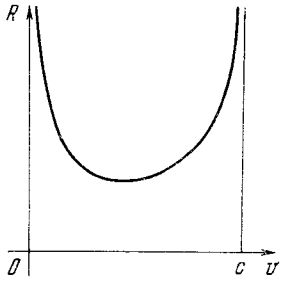

Рис. 42.

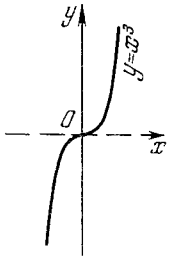

Рис. 43.

Чтобы найти скорость v, отвечающую минимальной сумме расходов, приравниваем нулю производную от B по v:

$$R'(v) = s\left(\frac{1}{(c-v)^2} - \frac{q}{v^2}\right) = 0.$$

Отсюда

$$v^2 - q(c-v)^2 = 0,\ v^2 = q(c-v)^2,$$
$$v = \sqrt{q}\,(c-v) = \sqrt{q}\,c - \sqrt{q}\,v\ *),$$
$$v = \frac{\sqrt{q}}{1+\sqrt{q}}\,c\ км/час. \quad (26)$$

Подставляя (26) в (25), находим и общую сумму расходов на самое экономное плавание: $R = \frac{1}{c}(1+\sqrt{q})^2$.

6. Какова касательная к кривой $y = x^3$ при $x = 0$? Мы имеем $y' = 3x^2$ и при $x = 0$, очевидно, $y' = 0$, так что касательной служит ось x (рис. 43).

*) Отброшенное решение, соответствующее уравнению

$$v = -\sqrt{q}\,(c-v),$$

не имеет смысла, так как правая часть отрицательна ($v < c$).

Мы видим, что в данном случае касательная переходит с одной стороны кривой на другую: при $x > 0$ кривая выше касательной, а при $x < 0$ кривая ниже касательной. Такие точки графика, где касательная переходит с одной стороны кривой на другую, называются *точками перегиба* (рис. 44). Так, то же значение $x = 0$ определяет точку перегиба для кривых

$$y = Cx^3 + x$$

при разных значениях C (рис. 45).

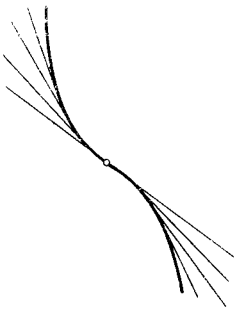

Рис. 44.

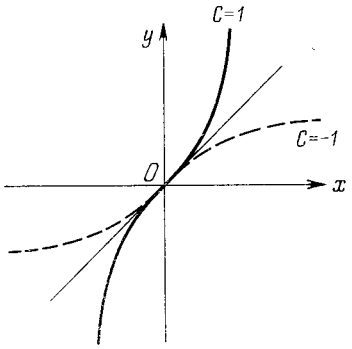

Рис. 45.

Действительно, мы имеем $y'(0) = 1$, так что уравнение касательной, проведенной через точку (0, 0), имеет вид

$$y_{\text{кас}} = x;$$

поэтому разность

$$y - y_{\text{кас}} = Cx^3$$

меняет знак при переходе от отрицательных x к положительным.

Поставим вопрос, как найти точки перегиба у графика данной функции $y = f(x)$.

Из рис. 45 видно, что если при увеличении x кривая переходит из положения «под касательной» в положение «над касательной», то ее угловой коэффициент $y'(x)$ по обе стороны точки касания больше, чем в самой точке касания:

$$y'(x) > y'(x_0),$$
$$x \neq x_0.$$

Аналогично, если при увеличении x кривая переходит из

положения «над касательной» в положение «под касательной», то $y'(x)$ по обе стороны точки касания меньше, чем в самой точке касания:

$$y'(x) < y'(x_0),$$

$$x \neq x_0.$$

В первом случае точка перегиба есть точка локального минимума функции $y'(x)$, во втором — точка локального максимума этой функции. Чтобы найти эти точки, мы должны сначала вычислить производную от функции

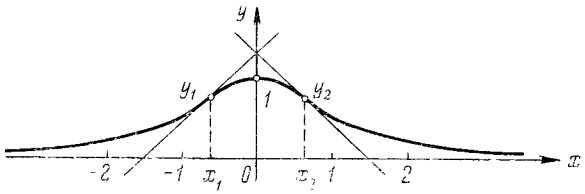

Рис. 46.

$y'(x)$. Эта функция $(y'(x))'$ называется *второй производной* от функции $y(x)$ и обозначается через $y''(x)$. Далее мы должны найти решения уравнения

$$y''(x) = 0.$$

Среди решений этого уравнения заключаются абсциссы всех искомых точек перегиба. (Могут появиться и «паразитные» решения, не определяющие точек перегиба; такие решения мы, разумеется, должны отбросить *).)

7. Найдем точки перегиба у кривой $y = \frac{1}{1+x^2}$ (рис. 46).

---

*) Так, для функции $y = x^4$ имеем

$$y' = 4x^3, \quad y'' = 12x^2;$$

при $x = 0$ мы имеем

$$y''(x) = 0;$$

однако эта точка не является точкой перегиба для кривой $y = x^4$.

Рисунок подсказывает нам, что таких точек должно быть две, они симметрично расположены относительно оси ординат. Найдем их, руководствуясь указанным выше правилом.

Мы имеем

$$y' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2},$$

$$y'' = (y')' = -\frac{(1+x^2)^2\,2 - 2x\,(4x+4x^3)}{(1+x^2)^4} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}.$$

Приравнивая полученное выражение нулю, находим два решения:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm 0,577\ldots$$

Мы видим, что дифференциальное исчисление позволяет единым общим методом решать целый ряд задач, решение которых недоступно элементарной математике. В этом — сила дифференциального исчисления.

ЗАДАЧИ

15. При каком соотношении высоты и диаметра основания консервная (цилиндрическая) банка данного объема требует минимального количества металла?

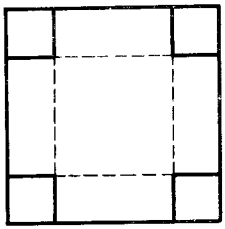

Рис. 47.

16. Из квадратного листа железа вырезают по углам квадратики и затем стороны сгибают по пунктирным линиям, превращая лист в открытую сверху коробку (рис. 47). При каком размере вырезаемых квадратов объем коробки будет наибольшим?

17. Формула для производной от функции $y = \sqrt{f(x)}$ имеет вид:

$$y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}.$$

Приняв ее, решить следующую задачу.

Мой дом стоит на расстоянии h *км* от (прямой) дороги (рис. 48). Я должен выйти на дорогу и на машине добраться до города, отстоящего (по прямой) от дома

на s *км*. Скорость пешехода u, скорость машины v. Какой маршрут наиболее быстрый?

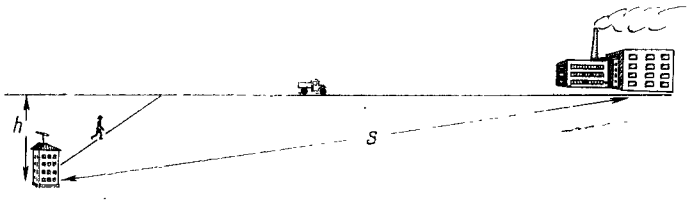

Рис. 48.

18. Какой сектор следует вырезать из круга радиуса R, чтобы из него можно было свернуть воронку наибольшей вместимости?

Множество задач на производные и их применения к разным вопросам математики, физики и др. имеется в распространенных задачниках.

§ 3. ИНТЕГРАЛЫ

Что называть площадью какой-либо плоской фигуры, ограниченной, вообще говоря, не прямолинейным контуром? Будем исходить из следующих предпосылок:

1. Площадь прямоугольника со сторонами a и b равна ab.

2. Площади *равных* (т. е. совмещающихся при наложении) фигур равны.

3. Если фигура Ф составлена из фигур $\Phi_1,\ldots,\Phi_n$, то ее площадь равна сумме площадей фигур $\Phi_1,\ldots,\Phi_n$.

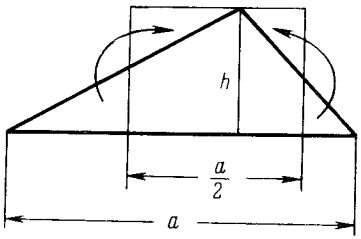

Рис. 49.

Отсюда следует, что площади равносоставленных фигур равны. Далее, треугольник с основанием a и высотой h можно разрезать известным образом на части и составить из них прямоугольник со сторонами $a/2$ и h (рис. 49); отсюда следует, что площадь треугольника

равна $ha/2$. Наконец, площадь любого многоугольника можно получить как сумму площадей составляющих его треугольников (рис. 50).

4. Площадь фигуры Ф меньше, чем площадь любого

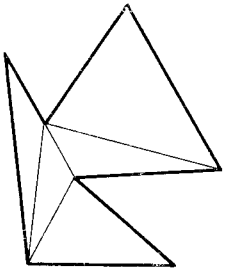

Рис. 50.

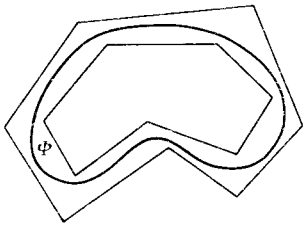

Рис. 51.

содержащего ее многоугольника, и больше, чем площадь любого содержащегося в ней многоугольника (рис. 51).

Существует теорема, в силу которой *каждой плоской фигуре* Ф, *ограниченной не очень сложным контуром, можно поставить в соответствие, причем единственным образом, число* $S(\Phi)$, *называемое площадью фигуры* Ф, *так, что при этом удовлетворяются условия* 1—4. (Точная формулировка и доказательство этой теоремы слишком сложны, чтобы их здесь приводить; есть книга Лебега «Об измерении величин», Учпедгиз, 1938, где можно найти полное освещение этих вопросов.)

Во всяком случае, площадь в указанном смысле существует для всякой фигуры, контур которой составлен из конечных дуг графиков рациональных функций. Принимая эту теорему, обсудим вопрос о самом вычислении площади фигуры Ф (криволинейной трапеции), ограниченной снизу отрезком оси x, от $x = a$ до $x = b$, сверху — кривой $y = f(x)$ (как обычно, $f(x)$ есть рациональная функция), с боков — прямыми, параллельными оси y и проходящими через точки $x = a$, $x = b$ (рис. 52).

Возьмем некоторое число x_0, лежащее в промежутке от a до b, и поставим аналогичную задачу относительно разыскания площади фигуры $\Phi(x_0)$, отличающейся от фигуры Ф тем, что правой ее границей является вертикальная прямая, проходящая не через точку b, а через точку x_0. Величина этой площади зависит от выбора зна-

чения x_0, т. е. является функцией от аргумента x_0, определенной на всем отрезке $a \leqslant x_0 \leqslant b$; мы обозначим эту функцию через $S(x_0)$. Очевидно, $S(a) = 0$, а $S(b)$ есть

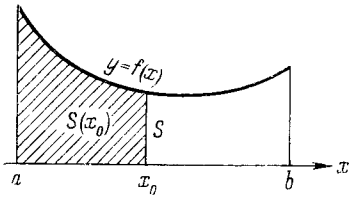

Рис. 52.

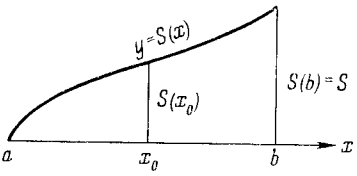

Рис. 53.

искомая площадь фигуры Ф. Можно набросать график этой функции; он в данном случае имеет вид, похожий на тот, который указан на рис. 53.

Если правая абсцисса x_0 фигуры Ф (x_0) увеличивается на $\Delta x_0 = x_1 - x_0$, то площадь получает приращение $ABDEC = \Delta S$ (рис. 54), которое составляется из площади прямоугольника $ABDC = y\,\Delta x_0$ и площади криволинейного треугольника CDE. Последняя не превосходит $\Delta y\,\Delta x_0$ *) и, следовательно, в соответствии с предыдущим может быть обозначена через $\varepsilon_1 \Delta x_0$.

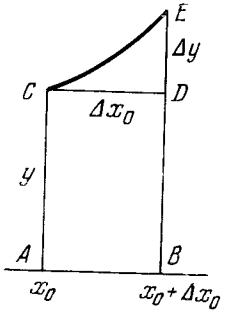

Рис. 54.

Таким образом,

$$S(x_1) - S(x_0) = (y + \varepsilon_1)\,\Delta x_0.$$

Уравнение секущей к графику кривой $y = S(x)$, проходящей через точки $(x_0, S(x_0))$ и $(x_1, S(x_1))$, имеет вид

$$y - S(x_0) = \frac{S(x_1) - S(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) = (y(x_0) + \varepsilon_1)(x - x_0).$$

Как и раньше, полагая здесь $x_1 = x_0$, получаем уравнение касательной в точке (x_0, y_0):

$$y - S(x_0) = y(x_0)(x - x_0).$$

Угловой коэффициент касательной оказывается равным $y(x_0)$. Но угловой коэффициент касательной к графику

*) Считаем, что функция y возрастает (или убывает) на участке от x_0 до x_1; для рациональной функции y всегда можно этот участок взять настолько малым, что это условие будет выполнено.

функции $y = S(x)$ в точке с абсциссой x_0 есть, как мы знаем, производная от функции $S(x)$ при $x = x_0$. Таким образом, мы получаем равенство

$$S'(x_0) = y(x_0).$$

Поэтому, *чтобы найти функцию* $S(x)$, *нужно найти функцию, производная которой есть* $y(x)$, т. е. произвести над функцией $f(x)$ операцию, обратную дифференцированию. Операция над какой-либо функцией, обратная дифференцированию, называется *интегрированием*. Всякая функция $F(x)$, производная которой есть $y(x)$, называется *первообразной от* $y(x)$ или *интегралом от* $y(x)$. Заметим, что если мы нашли одну какую-нибудь первообразную $F(x)$ от функции $y(x)$, то в качестве первообразной от той же функции $y(x)$ годится и всякая другая функция вида $F(x) + C$ (C — постоянная), поскольку *производная от постоянной равна* 0. Искомая функция $S(x)$, как мы заметили, при $x = a$ обращается в 0. Поэтому, найдя некоторую первообразную $F(x)$, для недостающей постоянной C можно написать уравнение

$$S(a) = F(a) + C = 0, \quad \text{откуда} \quad C = -F(a).$$

Окончательно, найдя первообразную функцию $F(x)$, искомое решение мы запишем в форме

$$S(x) = F(x) - F(a)$$

и, в частности,

$$S(b) = F(b) - F(a), \tag{27}$$

чем наша задача и решена — точнее, ее решение приведено к задаче об отыскании первообразной для данной функции $f(x)$.

Чтобы иметь возможность использовать полученный общий результат (27), нужно уметь находить первообразные. Если функция $y = y(x)$ есть многочлен

$$y = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,$$

то одну из ее первообразных написать легко, именно:

$$F(x) = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \ldots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}. \tag{28}$$

Поэтому площади фигур, ограниченных (сверху) линиями вида $y = P(x)$, где $P(x)$ — многочлен, можно вычислить без особого труда.

Пусть, например $y = y(x)$ есть линейная функция (рис. 55), изменяющаяся на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ от значения p до значения q:

$$y = p + \frac{q-p}{b-a}(x-a).$$

Одна из ее возможных первообразных, в соответствии с (28), имеет вид

$$F(x) = px + \frac{(x-a)^2}{2} \cdot \frac{q-p}{b-a}.$$

В соответствии с формулой (27) получаем

$$S(b) = F(b) - F(a) = pb + \frac{(b-a)(q-p)}{2} - pa =$$

$$= (b-a)\left(p + \frac{q-p}{2}\right) = (b-a)\left(\frac{p+q}{2}\right),$$

что совпадает с формулой площади трапеции в элементарной геометрии. В частности, для площади прямоугольника и треугольника (частные случаи трапеции) также получаются формулы элементарной геометрии.

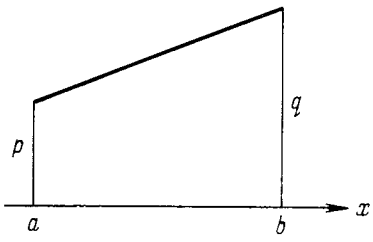

Рис. 55.

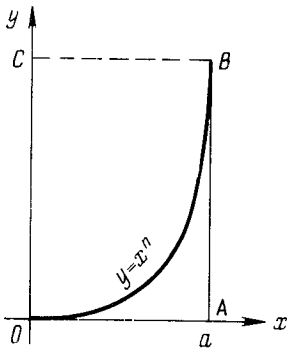

Рис. 56.

Но метод интегрирования дает возможность вычислить площади и многих неэлементарных фигур. Рассмотрим еще некоторые примеры.

1. Вычислим площадь OAB (рис. 56) криволинейного треугольника, ограниченного снизу отрезком $0 \leqslant x \leqslant a$

оси x, справа — ординатой $x = a$ и сверху — кривой $y = Cx^n$. Первообразной для функции $y = x^n$ является

$$F(x) = x^{n+1}/(n+1);$$

поэтому согласно формуле (27)

$$S(a) = C\frac{a^{n+1}}{n+1} - C\frac{0^{n+1}}{n+1} = C\frac{a^{n+1}}{n+1} = \frac{a \cdot Ca^n}{n+1}.$$

Число Ca^n есть длина отрезка AB. Таким образом, искомая площадь $S(a)$ есть $1/(n+1)$-я часть от площади описанного прямоугольника $OABC$.

2. Вычислим площади S_1, S_2, S_3 (рис. 57), ограниченные кривой $y = x(x-1)(x-2)(x-3)$ и участками оси x от 0 до 1, от 1 до 2 и от 2 до 3.

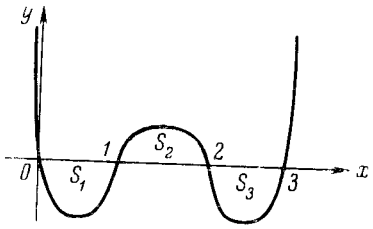

Рис. 57.

Мы имеем здесь

$$y = P(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x,$$

и ее первообразная

$$F(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{6x^4}{4} + \frac{11x^3}{3} - \frac{6x^2}{2}.$$

Отсюда

$$S_1 = F(1) - F(0) = \frac{1}{5} - \frac{3}{2} + \frac{11}{3} - 3 = -\frac{19}{30}.$$

Знак«—» подчеркивает, что площадь S_1 лежит под осью x. Затем

$$S_2 = F(2) - F(1) = \frac{32}{5} - 24 + \frac{88}{3} - 12 + \frac{19}{30} = \frac{11}{30},$$

и, наконец,

$$S_3 = F(3) - F(2) = \frac{243}{5} - \frac{243}{2} + 99 - 27 + \frac{4}{15} = -\frac{19}{30}.$$

Результат совпадает с S_1, что можно было бы предвидеть по соображениям симметрии.

3. Вычислим площадь S (рис. 58) под кривой $y = \frac{1}{x}$ между прямыми $x = 1$ и $x = N$, где N — большое

число. Первообразная от $y(x) = 1/x^2$ есть, очевидно, $F(x) = -(1/x)$, и мы получаем

$$S = F(N) - F(1) = 1 - 1/N. \qquad (29)$$

Интересно, что при любом как угодно большом N эта площадь меньше чем 1. Формула (29) показывает, что всей бесконечно протяженной фигуре, ограниченной снизу осью x, сверху — кривой $y = 1/x^2$, слева — отрезком прямой $x = 1$ и не ограниченной справа, естественно приписать конечную площадь — именно равную 1.

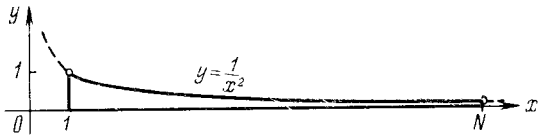

Рис. 58.

Мы видим, что исчисление интегралов, основанное на исчислении производных, позволяет единым образом решать ряд задач о площадях, решение которых недоступно для элементарной математики. Но задача о площади — сравнительно частная задача, только одна из реализаций общей задачи о разыскании первообразной функции по ее производной. А к этой общей задаче приводятся многие задачи из математики, а также из механики, физики, химии, биологии; интегральное исчисление дает возможность решать общим приемом множество задач с самыми различными конкретными постановками, но с общей математической сущностью (например, расчет энергии, необходимой для подъема спутника; выяснение закона распада радиоактивного вещества; количественный анализ хода химической реакции или размножения бактерий). Не имея возможности описывать здесь эти заманчивые приложения, обратим внимание начинающего читателя на книжку Г. Филипса «Дифференциальные уравнения», Гостехиздат, 1950, где имеется масса задач из разных областей науки и техники, рассчитанных на применение интегрального исчисления.

4. К следующему примеру отнесемся более внимательно. Речь идет о площади S под той же кривой $y = 1/x^2$ между

прямыми $x = a$ и $x = b > a$ (рис. 59). Пользуясь тем же приемом, получаем результат

$$S = F(b) - F(a) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

Если a и b одного знака, результат получается положительным, что вполне естественно, так как кривая $y = 1/x^2$ расположена над осью x. Если же a и b разных знаков, $a < 0$, $b > 0$, результат неожиданным образом отрицателен, что никак не вяжется с геометрической картиной. Причина в том, что мы формально, не критически, применили правило (27) с первообразной. На самом деле правило (27) имеет определенные границы его применения, за которыми оно теряет силу; но даже указать точно эти границы мы не имеем здесь возможности, поскольку сами формулировки требуют отсутствующих у нас общих понятий.

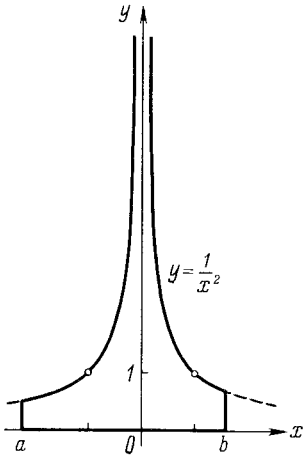

Рис. 59.

И вообще, в интегрировании рациональных функций при более внимательном рассмотрении у нас появляются «белые пятна». В самом деле, первообразные от некоторых рациональных функций можно получить, используя равенство

$$\left(\frac{1}{(x-a)^m}\right)' = -\frac{m}{(x-a)^{m+1}},$$

вытекающее из общей формулы (22). Именно, для выражения

$$y(x) = \frac{b_1}{(x-a_1)^2} + \frac{b_2}{(x-a_2)^3} + \ldots + \frac{b_m}{(x-a_m)^{m+1}} \quad (30)$$

первообразная может быть задана формулой

$$F(x) = -\frac{b_1}{x-a_1} - \frac{b_2}{2(x-a_2)^2} - \ldots - \frac{b_m}{m(x-a_m)^m}.$$

Но вовсе не каждая рациональная функция приводится к виду (30). Например, мы не получаем этим способом первообразной от функции $1/x$. В действительности у $1/x$ есть первообразная, но она не только не является рациональной, но и вообще не принадлежит к числу элементарных функций, изучаемых в школе. Если при дифференцировании, отправляясь от класса рациональных функций, мы не выходим из этого класса, то обратная операция — интегрирование с необходимостью приводит нас к новым функциям. А их изучение требует уже совсем иных общих подходов и совсем иного уровня техники анализа, чем те, которые мы применяли в этом кратком очерке.

Поэтому для должного владения аппаратом дифференциального и интегрального исчисления необходимо изучить предварительные разделы анализа, трактующие о вещественных числах, пределах и непрерывности. В этих разделах содержатся совершенно необходимые общие основы, позволяющие использовать весьма широкий класс функций, далеко выходящий за границы рассмотренного нами класса рациональных функций.

Существует много хороших книг, в которых излагаются основы математического анализа *). Мы надеемся, что начинающий читатель, заинтересовавшийся после чтения этой брошюры возможностями дифференциального и интегрального исчисления, найдет возможность и дальнейшего знакомства с математикой, столь полезной всем другим наукам, а через них — и всему человечеству.

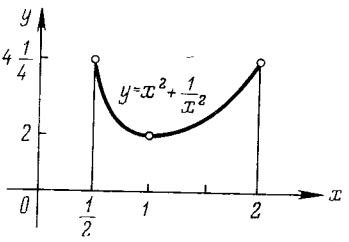

Рис. 60.

ЗАДАЧИ

19. Какова площадь, ограниченная сверху кривой $y = x^2 + 1/x^2$, снизу — осью x, слева и справа — вертикальными прямыми, пересекающими ось x соответственно в точках $a = 1/2$ и $b = 2$ (рис. 60)?

*) Например: В. И. Смирнов, Курс высшей математики, том 1; Г. М. Фихтенгольц, Основы математического анализа, том 1; А. Я. Хинчин, Краткий курс математического анализа; Р. Курант. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том 1.

20. Найти площадь, заключенную между двумя кривыми (рис. 61):

$$y = cx^m, \quad x = dy^n.$$

Указание. Использовать пример 1 § 3.

21. Найти площадь, ограниченную сверху прямой $x + y = 2$, снизу — параболой $y = x^2$ (рис. 62).

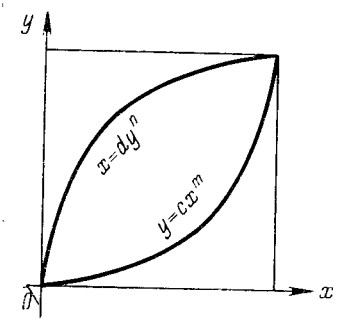

Рис. 61.

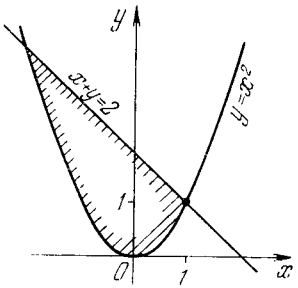

Рис. 62.

Указание. Представить искомую площадь как разность двух площадей, ограниченных с боковых сторон вертикальными прямыми.

22. Скорость, которую приобретает падающее тело за время t после начала падения, равна gt ($g = 9{,}81$ *м/сек*^{2}). Какой путь проходит падающее тело за это время?

Указание. Скорость есть производная от пути по времени.

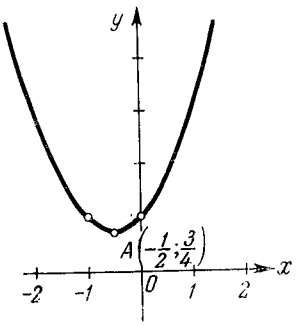

Рис. 63. К задаче 1.

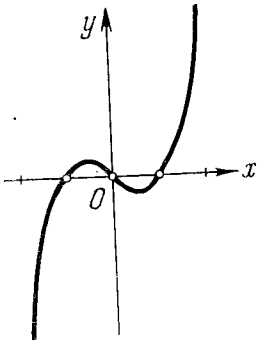

Рис. 64. К задаче 2.

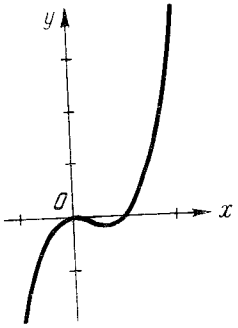

Рис. 65. К задаче 3.

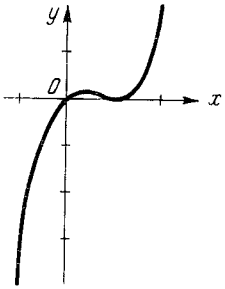

Рис. 66. К задаче 4.

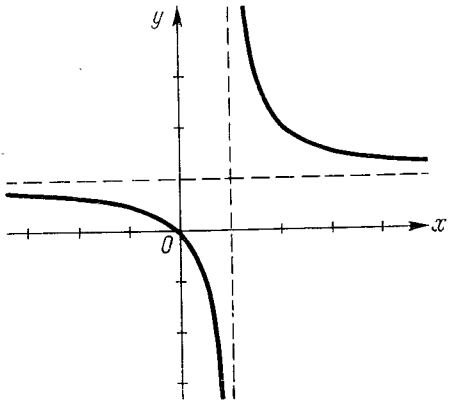

Рис. 67. К задаче 5.

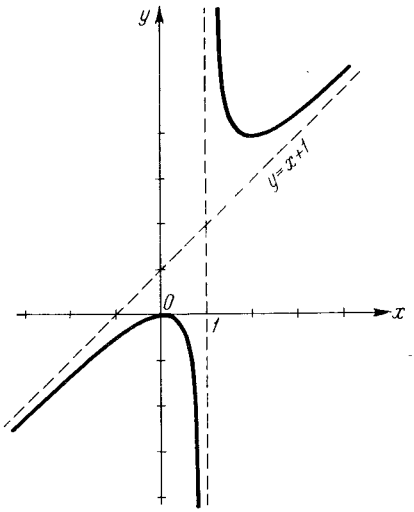

Рис. 68. К задаче 6.

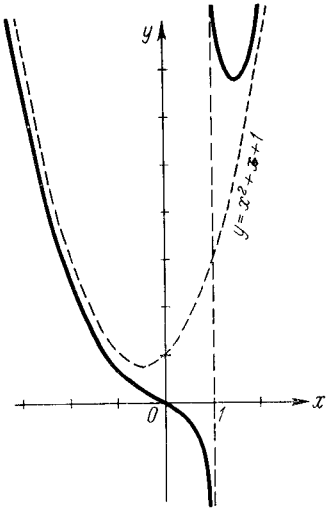

Рис. 69. К задаче 7.

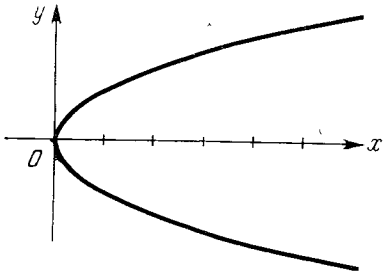

Рис. 70. К задаче 8.

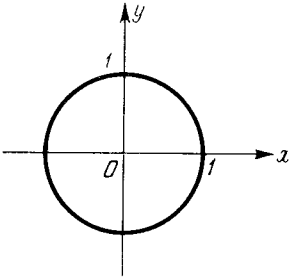

Рис. 71. К задаче 9.

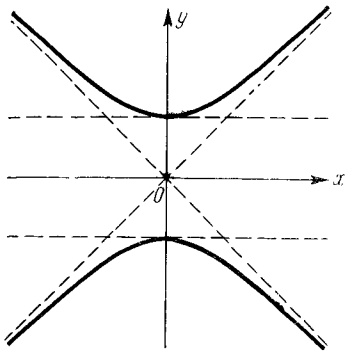

Рис. 72. К задаче 10.

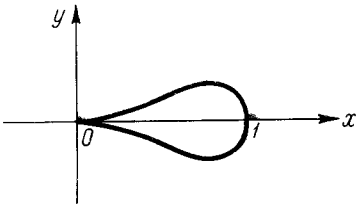

Рис. 73. К задаче 11.

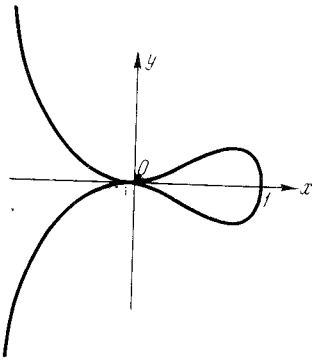

Рис. 74. К задаче 12.

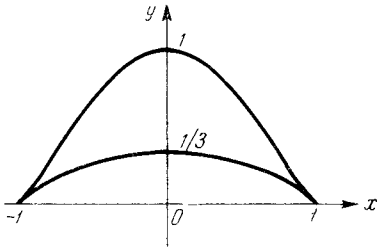

Рис. 75. К задаче 13.

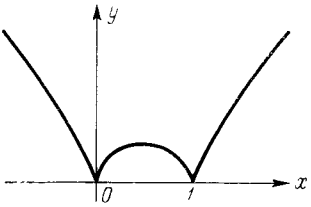

Рис. 76. К задаче 14.

15. Высота банки должна быть равна диаметру основания.

16. Стороны вырезаемых квадратов составляют 1/6 от стороны всего квадрата.

17. Синус угла пешеходного пути и перпендикуляра к дороге должен быть равен u/v, если только это отношение не превосходит

$$\sqrt{1-\left(\frac{h}{s}\right)^2}.$$

В противном случае наиболее быстрый маршрут — пешком по прямой линии в город.

18. $\alpha = 2\pi\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ радиан $\cong 72°$.

19. $S = 33/8$.

20. $S = c^{\frac{n+1}{1-nm}} d^{\frac{m+1}{1-nm}} \left(1-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+1}\right)$.

21. $S = 9/2$.

22. $s = (gt^2)/2$.

Цена 7 коп. (1000) 1677

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вып. 1. А. И. Маркушевич. Возвратные последовательности.
Вып. 2. И. П. Натансон. Простейшие задачи на максимум и минимум.
Вып. 3. И. С. Соминский. Метод математической индукции.
Вып. 4. А. И. Маркушевич. Замечательные кривые.
Вып. 5. Н. Н. Коровкин. Неравенства.
Вып. 6. Н. Н. Воробьев. Числа Фибоначчи.
Вып. 7. А. Г. Курош. Алгебраические уравнения произвольных степеней.
Вып. 8. А. О. Гельфонд. Решение уравнений в целых числах.
Вып. 9. А. И. Маркушевич. Площади и логарифмы.
Вып. 10. А. С. Смогоржевский. Метод координат.
Вып. 11. Я. С. Дубнов. Ошибки в геометрических доказательствах.
Вып. 12. И. П. Натансон. Суммирование бесконечно малых величин.
Вып. 13. А. И. Маркушевич. Комплексные числа и конформные отображения.
Вып. 14. А. П. Фетисов. О доказательствах в геометрии.
Вып. 15. И. Р. Шафаревич. О решении уравнений высших степеней.
Вып. 16. В. Г. Шерватов. Гиперболические функции.
Вып. 17. В. Г. Болтянский. Что такое дифференцирование?
Вып. 18. Г. М. Миракьян. Прямой круговой цилиндр.
Вып. 19. Л. А. Люстерник. Кратчайшие линии.
Вып. 20. А. М. Лопшиц. Вычисление площадей ориентированных фигур.
Вып. 21. Л. П. Головина и И. М. Яглом. Индукция в геометрии.
Вып. 22. В. Г. Болтянский. Равновеликие и равносоставленные фигуры.
Вып. 23. А. С. Смогоржевский. О геометрии Лобачевского.
Вып. 24. Б. И. Аргунов и Л. А. Скорняков. Конфигурационные теоремы.
Вып. 25. А. С. Смогоржевский. Линейка в геометрических построениях.
Вып. 26. Б. А. Трахтенброт. Алгоритмы и машинное решение задач.
Вып. 27. В. А. Успенский. Некоторые приложения механики к математике.
Вып. 28. Н. А. Архангельский и Б. И. Зайцев. Автоматические цифровые машины.
Вып. 29. А. Н. Костовский. Геометрические построения одним циркулем.
Вып. 30. Г. Е. Шилов. Как строить графики.
Вып. 31. А. Г. Дорфман. Оптика конических сечений.
Вып. 32. Е. С. Вентцель. Элементы теории игр.
Вып. 33. А. С. Барсов. Что такое линейное программирование.
Вып. 34. Б. Е. Маргулис. Системы линейных уравнений.
Вып. 35. Н. Я. Виленкин. Метод последовательных приближений.
Вып. 36. В. Г. Болтянский. Огибающая.
Вып. 37. Г. Е. Шилов. Простая гамма (устройство музыкальной шкалы).
Вып. 38. Ю. А. Шрейдер. Что такое расстояние?
Вып. 39. Н. Н. Воробьев. Признаки делимости.
Вып. 40. С. В. Фомин. Системы счисления.
Вып. 41. Б. Ю. Коган. Приложение механики к геометрии.
Вып. 42. Ю. И. Любич и Л. А. Шор. Кинематический метод в геометрических задачах.
Вып. 43. В. А. Успенский. Треугольник Паскаля.
Вып. 44. И. Я. Вакельман. Инверсия.
Вып. 45. И. М. Яглом. Необыкновенная алгебра.
Вып. 46. И. М. Соболь. Метод Монте-Карло.
Вып. 47. Л. А. Калужнин. Основная теорема арифметики.
Вып. 48. А. С. Солодовников. Системы линейных неравенств.
Вып. 49. Г. Е. Шилов. Математический анализ в области рациональных функций.